АНАЛИЗА СЛОБОДЕ
интелигенција и хијерархија

Слобода је количина могућности
интелигенција и хијерархија су способности
кориштења и ускраћивања могућности

филозофија и математика

лекторисано издање

Растко Вуковић

Бања Лука, мај 2016.

Лектор: Горан Дакић

© Архимед Република Српска

Бања Лука, 9. мај 2016.

Sadržaj

1 Одлучивање **5**
1.1 Слобода . . . 5
1.2 Интелигенција . . . 7
1.3 Хијерархија . . . 8
1.4 Производ . . . 9
1.5 Примери . . . 10

2 Информација **13**
2.1 Количина избора . . . 13
2.2 Процена информације . . . 15
2.3 Процена опажаја . . . 16
2.4 Сјај звезда . . . 17
2.5 Примери . . . 18

3 Статистике **21**
3.1 Мултипроцеси . . . 21
3.2 Усклађивање . . . 23
3.3 Корелација . . . 24
3.4 Регресија . . . 25
3.5 Примери . . . 26

Bibliografija **29**

Indeks **30**

Предговор

Текст који следи је резиме брошура „Критика правног система I-IV" и „Анализа демократије". Ипак, овде се не понављају тамошње провере основних теза, већ исте узимамо као основне принципе. Сирову верзију целог текста данас сам поставио на Scribd (в. [9]).

О слободи су написани томови књига, на свим језицима света, попут „Слобода (лат. libertas) се односи, у најопштијем смислу, на тврдњу 'бити слободан' (неспутан, незаробљен) и означава стање у којем субјект може да делује без присиле и забране". Такве описе у крајњем случају морамо сматрати и тачним, али ћемо их увек држати само широм оквиром бољих, прецизнијих дефиниција. Доћи ћемо на корак од математизирања социологије и новог формалног термина „слобода".

Са друге стране, а у истом духу, прецизираћемо појмове способности јединке и организације, у правцу „интелигенције" и „хијерархије". Проширићемо их на сваку индивидуу и на сваки колектив, било да су то ћелије ткива неког живог бића, пчеле у кошници, чопор вукова или ми у нашем друштвеном систему. Радићемо са дефиницијама и последицама које дозвољавају таква поопштавања.

Коначно, приметићу да од забавног штива неће остати пуно. Ако нисте велики љубитељ математике, сетите се да је основа сваке памети „здрав разум" и да је он позадина сваке формуле. Наша способност да разумемо „механизме" света је фантастична, било да смо за то школовани или не. Заправо, сви ми утолико лакше прихватамо нешто заиста ново, уколико смо били мање усмеравани у сличном правцу. То је оно о чему сам, надам се, водио рачуна.

Растко Вуковић, 6. мај 2016.

Увод

У току писања ове брошуре њен мото је био: „Не морам знати све о свему да би знао нешто о нечему". Тиме сам се тешио пред дилемом која би ме на крају могла сачекати: Како човеку од струке доказати да је ово што пишем (можда) тачно?

Како уопште знати да је тачан закон о времену, брзини и путу, ако сте живели у време пре Галилеа Галилеја или ако сте баш Ви тај физичар који ће открити законе кинематике? Котрљањем или гурањем неких каменчића по путу и мерењем њихових брзина не може се доказати формула $tv = s$. Такав доказ је увек парцијалан, ограничен на неколико сретно изабраних примера у које се једнакост уклапа и нема гаранције да то важи у многим осталим случајевима.

За разлику од оних који се баве експериментима ово је заиста велики проблем за неког ко би откривао неку нову теорију, сасвим оригиналну. Наравно, увек стоји друго решење: игнорисати заједницу стручњака, колеге, факултете и писати за себе никоме не објашњавајући ништа. Та опција је посебно привлачна када не желите да вам се други мешају у посао или да вам нешто отимају, а и корисна је јер се у психологији зна да чим испричате некоме шта ћете да урадите, тада губите део мотивације, губите нешто од способности за даљом оригиналношћу.

Са друге стране, већ сам незванично на интернету „објављивао" своје прилоге из ове и сличних области на које се мало ко обазирао[1]. То ме охрабрује да их и даље тако остављам, јер је просто невероватно како губим те папире по кући. Када тражим нешто што сам написао, то морам да тражим на интернету, нешто што уопште није комерцијална ствар.

Зато је ово монолог писан за „јавност". Пишем за себе, идући путем корак по корак од грубих представа ка мало прецизнијим, проверавајући успут да ли има садржаја и примена и у оним нејасним визијама формуле $\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}$. Занима ме разрада, али заправо не и коначни расплет приче у којој увек откривам нешто ново. Надам се да ћу у тексту избећи грубе, принципијелне промашаје, јер неке од ових теза мени су ипак одавно познате.

[1]Ту не рачунам скрипте из математике за гимназијалце.

Glava 1

Одлучивање

Одлучивање је процес препознавања и бирања *опција* заснован на вредностима и опредељењима онога који одлучује. Резултат одлучивања је *одлука*.

Не улазећи у разлоге одлучивања примећујемо да је оно последица постојања опција, потреба и могућности избора. У основи доношења одлука је недетерминизам физичког света и способност живог бића да користи неизвесности. Сваки облик живота има неку слободу да бира алтернативе ограничене њеном личном способношћу и ваљским околностима. Способност јединке да дође до датих избора називамо *интелигенција*, а способност њеног окружења да јој те изборе усмери или ускрати називамо *хијерархија*.

Приметимо да појам одлучивања можемо још ближе дефинисати, али нећемо. Саме полазне дефиниције у егзактном требају бити јасне и отворене, ако ништа друго оно за поопштавања и примене.

1.1 Слобода

Живо биће називамо оним које има способност одлучивања[1], за разлику од неживог. Тако препознајемо живот под микроскопом, у шуми, а тако ћемо препознати и откриће евентуалног страног живота у свемиру. Доследно, и роботе који ће моћи да доносе одлуке сматраћемо живим бићима.

Слобода је количина *могућности*. У ужем смислу то су могућности које можемо опажати, а у још ужем то су оне могућности које желимо или морамо. Овако дефинисан појам слободе може се проширити на сва жива бића.

Говорићемо једноставно о „слободи“ мислећи на „количину слободе“, чинећи исто тако једноставан пренос резултата наших мерења на познате историјске одреднице појма слободе. Из кратког прегледа који следи видећемо колико би било несигурно везати се за било који од тих периода.

Реч слобода (kata physin) код Хераклита из Ефеза (око 500. г.п.н.е.) представља норму: мора се деловати „према нарави“. Сократ се такође заузимао за безусловну

[1] То је оригинална дефиниција, према критеријумима: једноставности, недвосмислености и лаког поопштавања.

вредност моралнога, дакле ограничавао је слободу. Грчка реч за слободу (eleutheria) изворно значи само правно-политичку слободу. Слободан град-држава (polis) је онај који није под влашћу странаца. Касније, код Платона и Аристотела, јавља се појам личне слободе и етичке одговорности, када морална слобода постаје нешто сасвим друго од социјално-политичке.

Хегел је разликовао објективне и субјективне слободе, држећи да су унутрашње, субјективне слободе битан услов моралног деловања. Слобода није дозвољавање било какве својевољности, већ је она ограничена моралним, одговорним и људски исправним деловањем. Затим се појам слободе ширио до индивидуално-етичких и социјално-етичких норми, али је она у свим историјским периодима увек остајала само ограничена слобода.

Субјективна слобода је нарочито вишеструко негирана у раном новом веку. У строгој слици света тадашњег механицизма, према којој је све нужно, једнозначно одређено, није било места нити за слободно деловање. У том духу је и Спинозин метафизички детерминизам у делу Ethica, са којим се Лајбниц и Кант обрачунавају сваки на свој начин.

Тек од 1700. године, од времена енглеских слободних мислилаца и француске револуције (када постаје борбеном лозинком: liberte), под слободом се разуме нешто што је Хегел називао „апстрактном слободом“, оном која је ослобођена конкретне везаности и која се подиже у неограничене просторе слободе. Апстрактна слобода достиже ширину чисте самовоље.

Данашња *филозофија* познаје слободу као право избора и способност човека да бира и да доноси одлуке. Слободу као аутономију деловања, која значи могућност делања по сопственој вољи које претпоставља одсутност сваке принуде споља. Затим као слободу воље која подразумева све оно што не шкоди другоме. У онтолошком смислу слобода чини бит човека, његову човечност која га разликује од осталих бића детерминисаних нужношћу. Ову последњу називају и личном слободом.

Насупрот таквим одредницама слободу сматрамо „количином могућности“, мером ℓ по првом слову латинске речи libertas, циљајући на њену примењивост у свим претходно поменутим или сличним будућим тумачењима појма слободе. Са друге стране, ограничења која нађемо у тако лабавом и апстрактно дефинисаном појму слободе важиће без изузетка у свакој појединој примени.

На пример, слободе кретања јединке и културе у којој она живи ограничене су различитим могућностима. Радијус кретања, брзина, као и трајање једне *бактерије* веома су ограничени, не на исти начин као и њихове популације. Слободе кретања *ћелија биљке* и саме биљке нису исте, нити су такве слободе кретања једне *овце* и читавог *стада*. Свеједно, ми тражимо заједничке форме за све њих и то уопште није тако једноставан задатак као што изгледа на први поглед.

Помислимо само на чињеницу да овде морамо сматрати живим бићем како *јединку* тако и њено *окружење*, само ако такво окружење има неку способност *одлучивања*. Рецимо, друштвени систем у којем живимо има сопствени живот већ самим тиме што би одлуке које доноси друштво биле објективне у смислу да се отимају субјективној вољи појединаца, учесника одлучивања.

1.2 Интелигенција

Интелигенција је способност живог бића да користи *могућности*. Према томе, интелигентнима ћемо називати само жива бића, односно оно што има способност одлучивања. Тиме се ограђујемо од употребе исте речи за помагала интелигенције, попут: „ова справа је интелигентнија од оне“.

Са друге стране, под интелигенцијом ћемо разумети не само оно што мери IQ тест, већ и друге способности, вештине или знања. Да не буде забуне, ову интелигенцију означаваћемо словом **i**. Реч „интелигенција“ потиче од речи inteligere латинског порекла, која значи разумети, схватати.

Приметимо да један човек може бити добар у цртању, а лош у свирању, а други обрнуто. Оба показују исти резултат на тестирању интелигенције. Неке *бубе* су одлични летачи, друге живе под земљом, а те обе врсте могу подједнако вешто користити природне опције. Таквима не желимо доделити исто **i**.

Зато ћемо могућности које нуди окружење делити на поједине или групне особине $o_1, o_2, o_3, \dots$, а величину интелигенције исказивати посебно, у односу на поједину особину, што можемо означавати редом са $i_1, i_2, i_3, \dots$, односно:

$$\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, \dots). \tag{1.1}$$

То значи да је интелигенција *вектор*, без обзира на природу компоненти i_k. Даље, ако се компоненте могу изразити бројем, онда можемо говорити о интензитету, *модулу интелигенције* у облику:

$$i = |\mathbf{i}| = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + \dots + i_n^2}, \tag{1.2}$$

где је $n = 1, 2, 3, \dots$ укупан број посматраних особина.

Дакле, за разлику од слободе ℓ која је број, скалар, интелигенција **i** је вектор. Ипак, из дефиниције обе можемо приметити да су оне директно пропорционалне величине. Више могућности значи више слобода избора, али и више кориштења тих могућности. Другим речима, већим слободама одговара већа интелигенција, шта год да значи реч „већа“. Обрнуто, већа интелигенција тражи веће слободе.

Сходно томе, рецимо, интелигентније машине ће, поред осталог, тражити и више слободе[2]. Тачније, тражиће (количину) слободе сразмерну својој интелигенцији. Обратно, за створења која слободније користе своје окружење или алатке[3] рећи ћемо да су интелигентнија. Па то онда значи исто и за организације живих бића као целине.

Друштво као целина, које показује знаке сопственог живота доношењем одлука на које појединци могу премало утицати и показује способност кориштења ресурса, сматраћемо живим бићем са такође одређеном количином интелигенције. То је доследно овој теорији. Тако ћемо разумети и веома интелигентно понашање колоније мрава насупрот слабе интелигенције њених јединки.

[2] У том делу се слажем са: `https://www.edge.org/response-detail/26181`

[3] Горила зна да употреби штап да измери дубину воде. Шимпанзе штапом истерују термите, каменом ломе орахе.

1.3 Хијерархија

Хијерархија је способност друштва да својим јединкама ускрати могућности избора. Ако би друштво имало само просту организацију са сврхом преживљавања, тада бисмо реч „ускрати“ могли заменити речју „усмери“, али тада ова дефиниција не би обухватала могућност кажњавања (рецимо затварањем).

Дуално можемо рећи: хијерархија је способност друштва да користи могућности. Међутим, тада заправо не бисмо рекли нешто ново, већ само потврдили претходни став да друштво у целини можемо посматрати као посебно живо биће са сопственом моћи одлучивања и сопственом интелигенцијом.

Хијерархија, слично интелигенцији, такође има *векторску* природу. Иста група зидара може бити организована да нешто направи, а затим да то сруши. То подсећа на супротно деловање вектора истог правца и интензитета, а супротног смера. Ови зидари могу бити организовани и по неком сасвим другачијем правцу.

Тачније и не марећи много због другачијих философских схватања хијерархија, овде разматрамо појам из нове дефиниције хијерархије, који ћемо означавати словом $\mathbf{h}$ и који ћемо разумети као уређени низ квалитета h_k, односно:

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n), \tag{1.3}$$

где је $n = 1, 2, 3, \dots$ број квалитета хијерархије које посматрамо. То могу, али и не морају, бити квалитети оних особина које су компоненте вектора интелигенције (1.1), али свеједно, *интензитет хијерархије* такође желимо изразити бројем:

$$h = |\mathbf{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}. \tag{1.4}$$

Међутим, подразумеваћемо да су интелигенције и хијерархије дефинисане над истим низовима особина $(o_1, o_2, \dots, o_n)$.

Моћ ускраћивања $\mathbf{h}$ избора ℓ зависи и од врсте и количине тих избора. Приметно је да, док способност коришћења избора $\mathbf{i}$ може расти заједно са бројем ℓ, она тада за исто ℓ мора опадати са повећањем $\mathbf{h}$. У складу са интуитивним схватањем „стеге хијерархије“ слобода ℓ је директно пропорционална обема, и интелигенцији и хијерархији. Отуда су, хијерархија и интелигенција у обрнутој сразмери.

То значи да друштва у срединама са приближно истим количинама искушења, односно приближно истим слободама ℓ, ако им јединке нису исте интелигенције, она се морају организовати у различите хијерархије. Да би опстала, мање интелигентна створења морају имати ефикаснију, снажнију хијерархију.

Зато се иста друштва сличних јединки у време међусобног сукоба морају војнички јаче организовати да би дошли до победе, заправо до преживљавања. На исти начин видимо да моћ хијерархије може (али не мора) расти са повећањем популације. Порастом броја јединки у колонији може се повећати контрола природних ресурса, па је логично претпоставити да повећање густине насељености мора утицати на квалитет и квантитет хијерархије. Већа и гушћа популација има већу конкуренцију на ресурсе околине и настаје већа потреба за ускраћивањем могућности избора , тј. за већом хијерархијом колоније.

1.4 Производ

Из свега досадашњег произилази да је:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{h} = \lambda\ell, \tag{1.5}$$

где је ламбда ($\lambda \in \mathbb{R}$) нека константа, карактеристика биолошке врсте и њеног окружења. Како је на десној страни ове једначине скалар ($\ell \in \mathbb{R}$), то је на левој страни скаларни производ вектора интелигенције и хијерархије ($\mathbf{i}$ и $\mathbf{h}$), тј. скаларни производ низова (1.1) и (1.3).

Још једном напомињем да се подразумева да интелигенцију и хијерархију дајемо над истим низовима особина $o_1, o_2, \dots, o_n$, тако да је у претходним изразима:

$$i_k = \mathbf{i}(o_k), \quad h_k = \mathbf{h}(o_k), \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{1.6}$$

Такође подразумевамо да су ове компоненте: (1) неке величине са којима знамо обављати рачунске операције; (2) да их можемо представљати у ортонормираној бази векторског простора. Зато можемо писати:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{h} = i_1h_1 + i_2h_2 + \dots + i_nh_n, \tag{1.7}$$

што нам је познато из математике вектора. Отуда и једнакост:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{h} = ih\cos\varphi, \tag{1.8}$$

где су i и h *интензитети* вектора, тј. (1.2) и (1.4), а фи је *угао* између датих вектора, тј. $\varphi = \angle(\mathbf{i}, \mathbf{h})$. Косинус угла је већи када је угао мањи.

Касније ћемо покушати свим овим изразима (1.5-8) давати неки политички, социјални или правни смисао, мада то у основи и није неопходно. Логика овог формализма се може срушити само контрадикцијом унутар самог формализма. Евентуално одсуство одраза на постојећа друштва не може умањити истинитосну вредност ове теорије. То кажем само да нагласим независност саме теорије и важност унутрашње логике, а тек затим прелазимо на примене.

Међу сличним друштвима и окружењима коефицијент ламбда не би требало да се мења, па га тада можемо заменити и јединицом. Тако можемо посматрати хијерархије $\mathbf{h}'$ и $\mathbf{h}''$ у оквиру истог ширег друштва када имамо једнакости:

$$\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{i}\cdot(\mathbf{h}' + \mathbf{h}'') = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}' + \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}'' = \ell' + \ell'', \tag{1.9}$$

које су последица комутативности скаларног множења. Оне овде имају смисао *адитивности* хијерархије.

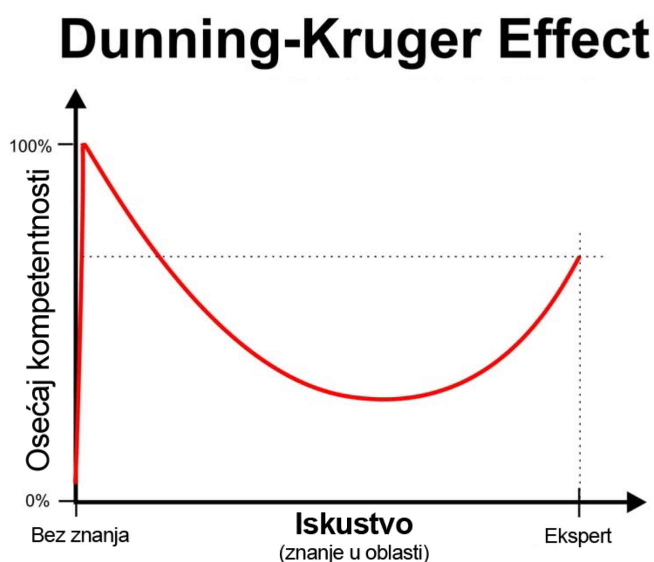
На пример, хијерархије у једном друштву су породица, религија[4], правни систем. Према (1.9) оне су адитивне. Такође, формула предвиђа да ће јачање правног система потискивати и гушити породицу и религију. И заиста, државе због „заштите“ већ данас узимају себи за право да пресуђују у унутарпородичним сукобима, да одузимају дете родитељима, претпостављајући друштвене законе природним.

[4] Из брошуре [1]; да је религија одраз тежње ка ауторитету.

1.5 Примери

Приметимо да још увек нисмо прецизирали појам количине слободе, нити смо дефинисали компоненте вектора интелигенције или хијерархије. Међутим, кроз примере ћемо видети да је ипак могуће извући штошта из тог наизглед оскудног модела. То ће бити и провера тачности претходних теза.

Данинг-Кругеров ефекат је когнитивни поремећај када особе са мањком вештина и знања у некој области пате од илузорне супериорности, грешком верујући да су њихове вештине много веће него што заправо јесу[5].



Slika 1.1: Данинг-Кругеров ефекат.

На слици 1.1 види се (црвена линија) како повећањем искуства (знања у области) опада осећај компетентности да би тек негде са знањем блиским експерту тај осећај почео да полако расте. Следи пример утицаја овог ефекта на интелигенцију групе особа као целине у односу на интелигенцију појединца.

Пример 1.5.1. *Показати да Д-К ефекат чини двоје људи глупљом од једног.*

Решење. Посматрајмо две особе A и B одвојено, а затим као групу AB на неком тесту интелигенције од само пет питања.

Нека је свака од особа на последња три питања дала исте одговоре, од којих су два тачна ($\top$) и једно нетачно ($\bot$), као на слици 1.2. На прва два питања особа A је одговорила редом тачно и нетачно, а особа B нетачно и тачно. Тако свака од особа A и B појединачно има по 3 од 5 тачних одговора.

Након појединачног одговора ове особе се договарају и дају још један одговор који представља одговор групе AB. Оптимално за успех групе било би да предложе

[5]Daning-Krugerov efekat: `https://sr.wikipedia.org/wiki/Daning-Krugerov_efekat`

исти заједнички одговор на последња три питања теста, али се око прва два морају договарати.

Slika 1.2: Резултат тестирања.

Тада наступа Д-К ефекат. На првом питању особа B има мање знања и већу моћ убеђивања, па они као заједнички одговор прихватају (погрешан) предлог особе B. На другом питању обрнуто, особа A има мање знања и бива убедљивија, па група за друго питање даје такође погрешан одговор. Дакле, укупни резултат групе је 2 тачна од 5, што је лошије од резултата (3 од 5) сваког од појединаца.

Слично би се десило да су ове особе на прва два питања дале такође различите одговоре, али да је A одговорила два пута тачно, а B ниједном. Опет је заједнички скор 2 од 5, тј. мањи од појединачних. □

Разлог мање памети групе од њених појединаца био је Данинг-Кругеров ефекат и демократски начин одлучивања. Да је група хијерархијски уређена, под притиском ауторитета остали чланови би се слагали са мишљењем лидера и изостао би Д-К ефекат, па би резултат групе би био бољи. То знају у војсци.

Парадоксално, али чини се као да се друштво прелазећи на демократију одриче слободе. Наиме, тада вредности $\mathbf{h}$ падају, што следи из пада интелигенције групе и дуализма. Зато очекујемо да опада и слобода $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, нарочито када се ово дешава истом друштву са приближно непромењеном интелигенцијом појединаца.

Пример 1.5.2. *Шта се догађа са хијерархијом при преласку на демократију?*

Решење. Демократија фаворизује слободе путем равноправности. Због првог се чини да она увећава ℓ, а због другог да умањује $\mathbf{h}$. Чини се да формула $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ не важи, јер памет појединаца $\mathbf{i}$ остаје приближно иста. Чудно би било и да се ово ℓ може тек тако декларативно увећавати у приближно истом природном окружењу.

Међутим, у демократији јача правни систем! Када су сви људи равноправни настаје инфлација њихове вредности и потреба за неким надљудским ауторитетом. Поготово зато што једнакост генерише сукобе (в. [1]), а сукоби су често непријатни, правне мере наилазе на одобравања, стежући друштво. □

Дакле, правни систем је нова снага хијерархије ($\mathbf{h}$) у демократији. Охрабрујемо га и „сазнањем“ да цивилизација може и треба да поправља природу, те да нам

природни закони нису довољни. Правни систем постаје врста „бекства од слободе“, на начин како је то већ 1941. године разумео Ерих Фром[6].

Бекство од слободе су, према Фрому, ирационални покушаји да се избегне или умањи неподношљиво осећање усамљености савременог човека, а који, заправо, само још више појачавају осећање изгубљености. Фром издваја три главна механизма бекства: ауторитарност, деструктивност, конформизам. Прва два механизма су карактеристична за тоталитарно, а трећи за савремено демократско друштво[7].

Ми се овде ипак нећемо држати овог претежно психолошког оквира, него много општије формуле $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, која би требала да важи не само за људе него и за све живе врсте и то не само на Земљи.

Пример 1.5.3. *Може ли ова формула објаснити Стокхолмски синдром?*

Решење. Стокхолмски синдром је назив психолошког стања које настаје у ситуацијама у којима долази до зближавања отмичара и талаца. Објаснити то помоћу $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$ изгледа као немогућа мисија. Међутим - није.

У друштву отпадника од закона, који се чине успешни, лако можемо стећи перцепцију слабијег правног система, који се онда мора нечим заменити. У њиховој близини, када са нама нису лоши, та допуна може постати ауторитет отмичара. Отуда привлачност: из задовољства комплетирањем формуле. □

Локалне хијерархије формирали би ауторитети у оквиру ширих друштава и ширих ауторитета. Занимљиво је посматрати шта у том смислу дозвољава формула $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$. Претпоставимо да је окружење увек приближно исто.

Пример 1.5.4. *Ко су лидери локалних хијерархија?*

Решење. Могућа су оба случаја - када је лидер способан и када није.

Први случај је можда мафијашки бос, добар војсковођа, најбољи хирург именован за шефа хирургије. Због свог већег $\mathbf{i}$ он за себе тражи мање $\mathbf{h}$. Због своје веће радозналости, продорности и уопште способности он може постати хризматични лидер квалитетне групе и управо због тога, али и због тежње да буде у мањој стези хијерархије, он лако долази у сукоб са лидерима шире заједнице.

Други случај: лидер постављен од шире заједнице, рецимо од владајуће политичке групе. Због невеликог $\mathbf{i}$ њему је лако натоварити веће $\mathbf{h}$, па такав постаје у правом смислу послушник. Већа плата, а понекад и већа радна оптерећења, правдају се повећаном „одговорношћу“, која то заиста и јесте. Нема бриљантних успеха, али нема харизме, нити непослушности, па у стабилном друштву његово отаљавање посла може и да траје. □

Много оваквих примера може се наћи у мојим брошурама наведеним на крају.

---

[6] Erich Fromm, 1900-1980, немачки филозоф.

[7] Википедија: Бекство од слободе.

Glava 2

Информација

Математичку дефиницију информације открио је Хартли 1928. године, коју је затим поопштио Шенон 1948. године. Та су истраживања основа информатике, а однедавно се користе и за разумевање интеракција квантне механике. Чини се да се укупна количина информације коју затворен квантни систем има не мења нити временом нити премештањем.

2.1 Количина избора

Да бисмо могли имати слободу морамо имати могућности бирања, али пре свега треба нам недетерминизам. Потребна је физичка егзистенција случајности или бар оно што у математици третирамо као „случајне догађаје“. Друго, да бисмо могли израчунати „количину слободе“ требамо разумети шта је то број слобода.

Разлику између „стварних“ случајних догађаја и оних који су нам довољни у математици можемо схватити помоћу децимала броја $\pi = 3,14159265359\dots$. Када их први пут видимо те цифре у низу нам се појављују као случани бројеви, али не и други пут. Оне сваки пут могу проћи тестове случајности теорије вероватноће, иако ми знамо да су оне ту и које су и да ту нема никакве произвољности. Док би стварна случајност била апсолутно непредвидљива, било коме, било чиме, било када, ова је само псеудо-случајност, кобајаги-случајност, али фромално идентична стварној.

Зашто количину случајности не дефинишемо просто бројем случајних исхода? Када бацимо новчић имамо два таква исхода, „писмо“ и „глава“, али нам треба само једно бирање. Као када имамо две кутије и требамо да погодимо у којој је сакривен тражени предмет. Пред нама је само једна дилема, јер бирајући прву кутију и отварајући је сазнаћемо и садржај друге. Сам чин бирања једне отклања обе неизвесности.

Када имамо четири кутије у којима је само један тражени предмет, поделићемо их у две групе по две и питати: да ли је предмет у првој групи? Затим други избор сводимо на претходни случај. У случају осам кутија поделимо их у две групе по четири и наставимо на претходни начин.

Уопште, када имамо $m = 2, 4, 8, \dots$ кутија у којима је само један предмет за који се распитујемо довољна су само $\ell = 1, 2, 3, \dots$ питања да сазнамо где је. Ово можемо представити једначином $m = 2^\ell$ или инверзно:

$$\ell = \log_2 m, \tag{2.1}$$

што је Хартлијево откриће. Информација (ℓ) је логаритам броја једнаковероватних (m) случајних догађаја.

Ова формула се лако поопштава на остале природне бројеве ($m \in \mathbb{N}$), па и на све позитивне реалне бројеве ($\mathbb{R}^+$), а затим и на остале логаритме. Уопште, Хартлијева информација коју добијамо након реализације случајног догађаја са вероватноћом $p \in (0, 1)$ је позитиван реалан број:

$$\ell = -\beta \log p, \tag{2.2}$$

где је $\beta \in \mathbb{R}^+$ константа која дефинише базу логаритма и јединицу информације.

Шенон је даље посматрао скуп $n = 1, 2, 3, \dots$ случајних догађаја са неједнаким вероватноћама $p_1, p_2, ..., p_n$, које чине расподелу вероватноћа (збир свих p-ова је један) и приметио да k-та реализује информацију са износом $\ell_k = -\beta \log p_k$. Њихова средња вредност је

$$\ell = p_1\ell_1 + p_2\ell_2 + \dots + p_n\ell_n,$$

односно:

$$\ell = -\beta(p_1 \log p_1 + p_2 \log p_2 + \dots + p_n \log p_n). \tag{2.3}$$

То је Шенонова информација скупа $n \in \mathbb{N}$ случајних догађаја.

Из дефиниције слободе ℓ, као количине могућности, следи да је то Шенонова информација вероватноћа датих избора. Остају нам дискутабилне само „могућности“ живог бића и њихове „вероватноће“.

Често смо у заблуди да смо нешто могли „бирати“, а заправо смо били вођени нама непознатим детерминизмима. Верујем да се и такав „избор“ може подвести под слободу, да је илузија слободе равна стварној слободи. Како овде и није циљ да дођемо до тачног објашњења свега, биће нам довољна и сама форма. Добра нам је и перцепција слободе, само ако је довољно убедљива.

Са друге стране, догађаје које не опажамо, као и оне које никада не бирамо, требамо избацити из рачуна. То поготово зато што сабирак у Шеноновој формули $p \log p$ тежи нули када вероватноћа (p) тежи нули[1], па он и не учествује у укупном збиру. То је разлог да било која околина није иста за различите врсте.

На пример, трава мора да има много мање ресурса на истом тлу него што то имају мрави. Зато што има мање $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, трава може бити и глупља (мање $\mathbf{i}$) и слабије организована (мање $\mathbf{h}$) од мрава.

Тако долазимо до закључка да на истом тлу могу живети различите врсте, без сукоба око истих избора и до објашњења зашто се такве организују у посебне хијерархије. Чула врстама помажу да дођу до хране или да се одбране, а одсуства опажања воде биолошки свет у повећање разноврсности.

[1] У математици се лако доказује да $p \log p \to 0$ када $p \to 0$.

2.2 Процена информације

Због моћи перцепције и, са друге стране, због ограничености опажања, могуће је манипулисати слободом, односно бројем $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$. То је (мада не на овај начин) примећено и укидањем ропства, када је схваћено да је оно мање ефикасно за богаћење него помоћу кметова. Кметови су добили више слободе (ℓ) од робова, уз истовремено повећање свог интелектуалног ангажовања ($\mathbf{i}$), али са слабим или никаквим губитком контроле ($\mathbf{h}$) од стране феудалца.

Још је ефикаснији рад данас у демократији, са већим приходима по глави радника, јер је порасла и радна способност ($\mathbf{i}$) радника и његова дисциплина ($\mathbf{h}$), а што је могуће због веће слободе (ℓ). Ова слобода је порасла не само због илузије већих слобода у демократији, већ и због стварног пораста броја избора услед рада на толеранцијама друштва, али и развоја нових технологија.

То све отежава вредновање појединих исхода и компликује израчунавања слободе. Међутим, проценама информације можемо се бавити и на друге начине.

Замислимо да смо у комисији која бира секретарицу. Њих $n = 100$ кандидаткиња улазе једна по једна када их упознајемо по први пут, а одлуку о пријему у радни однос можемо донети само тада. Ону коју смо отпустили не можемо поново позивати. Да ли постоји нека стратегија одабира најбоље међу њима?

Позитиван одговор даје теорија вероватноће. Обавимо разговор са првом трећином, да бисмо имали неки узорак о броју бодова које би могли упоређивати са оним осталима. Затим бирамо прву следећу која је боља од свих из те контролне групе. Ако се деси да ниједна није боља, онда бирамо последњу. Може се израчунати да је оптимални број чланова контролне групе:

$$\ell' = n/e, \tag{2.4}$$

где је $e = 2,71828\dots$ Ојлеров број, база природног логаритма $\ln x = \log_e x$, па је у овом случају ℓ' око 37. То је познати[2] „проблем секретарице“ и нећемо га сада решавати.

Оно што је овде ново је да (2.4) може послужити као добра процена Шенонове информације (2.3). Наиме, неизвесност низа $n = 100$ неједнаких случајних догађаја оптимално процењује његових $n/e = 37$ чланова, што значи да је количина података n/e довољна за оно што нам треба у низу од n њих.

Тачност ове процене можемо видети на још један начин[3]. Функција $y = -x \ln x$, која је сабирак у Шеноновој једнакости, достиже своју максималну вредност $y_0 = 1/e$, када променљива x узме вредност $x_0 = 1/e$. Збир свих n таквих сабирака износи n/e. Тада две формуле ((2.3) и (2.4)) дају исти резултат.

Шенонова формула ради са расподелама вероватноћа (чији је збир један), што у овој процени не мора бити. Управо зато је она згодна. За процену слободе изразом (2.4) довољно је познавати број n могућих непознатих избора, односно опажања и имати неки договор око јединице слободе.

[2] Secretary problem: https://en.wikipedia.org/wiki/Secretary_problem

[3] в. пример 2.5.5.

2.3 Процена опажаја

Унутар савремене психологије постоји дисциплина која се назива психофизика, а која се бави проучавањем опажаја. Израз „апсолутна осетљивост“ односи се на могућност (способност) детекције подражаја из околине. Апсолутни *лимен*, праг осетљивости, најмања је количина енергије коју човек може осетити. То је количина светла код вида, јачине звука код слуха, притиска код додира.

Диференцијална осетљивост је могућност разликовања подражаја. Мера такве осетљивости назива се диференцијални лимен или праг осећаја, који се у класичној психофизици првенствено односио на димензију интензитета. То је најмања разлика у интензитету два подражаја исте врсте које испитаник може тек разликовати у 50 одсто случајева. Прва открића у том подручју направио је Вебер[4], мерећи диференцијалну осетљивост тежина.

Вебер је 1834. године открио (статистичку) закнитост прага осећаја:

$$\frac{\Delta W}{W} = \kappa, \tag{2.5}$$

где је ΔW потребан прираст у интензитету надражаја да би разлика доживљаја била тек примећена, W је интензитет нивоа надраживања, а κ је константа. Другим речима, ако је испитаник при тежини тега од 50 грама могао приметити варијацију његове тежине тек повећањем за 1 грам, онда би он при тежини од 100 грама могао приметити варијацију тежине тек око 2 грама.

Веберова константа κ, десно у једнакости (2.5), за електричне надражаје износи 0,01; за тежину износи 0,02; за дужину линија 0,03; за јачину звука 0,04; мирис 0,05; светло и укус (слано) 0,08. Како су то приближно мали бројеви, збир f редом свих прагова од најнижег, апсолутне осетљивости W_0, до датог износа W, може се проценити интегралним рачуном (2.5). Добијамо:

$$f(W) = \frac{1}{\kappa}\ln\frac{W}{W_0}. \tag{2.6}$$

То је Фечнеров[5] закон из 1860. године. Приметимо да је количина опажаја $f(W)$ формално једнака Хартлијевој информацији (2.2), те да она представља и количину могућности, односно слободе датог чула.

Због адитивности слободе (1.9), сада при различитим способностима $\mathbf{i}$ индивидуе у константној хијерархији $\mathbf{h}$, процењујемо да се перцепције наших чула такође додају простим сабирњем у укупну слободу ℓ. За $n = 1, 2, 3, \dots$ различитих чула ови укупни опажаји били би $f_1, f_2, \dots, f_n$, а њихова средња вредност:

$$f = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \dots + p_n f_n, \tag{2.7}$$

где је p_k вероватноћа употребе k-тог чула, редом за $k = 1, 2, \dots, n$.

[4]Ernst Heinrich Weber (1795–1878), немачки лекар.

[5]Gustav Theodor Fechner (1801-1887), немачки физичар и филозоф.

2.4 Сјај звезда

Прву класификацију звезда по сјају дао је Хипарх у II веку пре нове ере. Он је поделио звезде видљиве голим оком у шест класа или *магнитуда* тако да су најсјајније звезде биле у првој, а најслабије у шестој магнитуди. Након Веберовог и Фечнеровог закона за сва чула, у 19. веку је постављен математички израз за Хипархову класификацију:

$$U = C^R, \tag{2.8}$$

да геометријској прогресији надражаја (узрока U) одговара аритметичка прогресија реаговања чула (R), при чему је C нека константа. Овај општи закон је Погсон[6] 1856. године применио у астрономији.

Означимо са E_m осветљеност звезде привидне величине, магнитуде m. Мерењем је утврђено да је осветљеност звезде прве магнитуде 100 пута већа од осветљености коју даје звезда шесте магнитуде, па из (2.8) добијамо $E_1/E_6 = 100 = C^5$, а отуда је $\log C = 2,5$. Затим налазимо:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log \frac{E_2}{E_1}, \tag{2.9}$$

где је E_2/E_1 однос осветљености измерених за два светлосна извора магнитуда m_2 и m_1. То је Погсонов закон.

У астрономији су настојали да нове резултате уклопе у старе, да звезде шесте привидне величине буду на граници видљивости голим оком. Међутим, многе звезде прве величине знатно се разликују по сјајности, па је Хипархова скала проширена и на негативне бројеве. Тако је привидна величина Сиријуса, најсјајније звезде не небу $m = -1,4$; пуног Месеца $m = -12,6$; Сунца $m = -26,8$.

Да су количине опажања логаритамске величине, попут информације или слободе, више и није нека новост. Међутим, ова идеја у астрономији иде и даље, на процене „чистих“ физичких величина, каква је рецимо *луминозност*, тј. укупна количина енергије коју звезда израчи са своје површине у јединици времена:

$$L = 4\pi R^2 F(R), \quad L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \tag{2.10}$$

где је лево $F(R)$ флукс зрачења звезде радијуса R, а десно исти израз са претпоставком да звезда зрачи као апсолутно црно тело температуре T. Користећи (2.9) сада добијамо:

$$M_1 - M_2 = 2,5 \log \frac{L_2}{L_1}, \tag{2.11}$$

где су M_1 и M_2 апсолутне звездане величине. Највећи број звезда има апсолутне звездане величине у границама $-6 < M_v < +10$.

Тако добијамо за Сунце $M_v = +4,8$ ($m_v = -26,8$), Сиријус $M_v = +1,5$ ($m_v = -1,4$), Вега $M = 0,5$ ($m_v = +0,1$), Алфа Центаури $M_v = +4,7$ ($m_v = +0,3$).

[6] Norman Robert Pogson (1829-1891), енглески астроном.

2.5 Примери

Да смо имали $m = 1, 2, 3, \dots$ могућности које смо у неком периоду бирали редом $n_1, n_2, \dots, n_m$ пута, учесталост избора прве, друге, ..., m-те, била је:

$$p_1 = \frac{n_1}{n}, \quad p_2 = \frac{n_2}{n}, \dots, \quad p_m = \frac{n_m}{n}, \tag{2.12}$$

где је $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$. Тако се дефинишу вероватноће p_k за индексе $k = 1, 2, \dots, m$, а због $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ шема:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

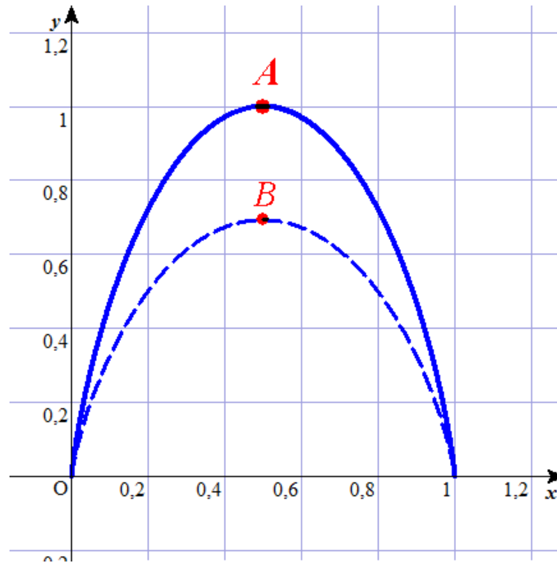
назива се расподела вероватноћа. За њих важи Шенонова формула (2.3).

Пример 2.5.1. *Показати да се максимална информација у случају две могућности, $m = 2$, добија када су вероватноће једнаке, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.*

Решење. Ставимо $p_1 = x$ па је $p_2 = 1 - x$. Шенонова информација је тада

$$\begin{cases} A: & y = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x), \\ B: & y = -x \ln x - (1-x) \ln (1-x), \end{cases} \tag{2.14}$$

изражено у „битима" и „натима", тј. у случају логаритамске базе 2 и $e = 2,718\dots$.



Slika 2.1: Информација (2.14).

На графикону 2.1 се виде тачке $A(\frac{1}{2}, 1)$ и $B(\frac{1}{2}, \ln 2)$ које представљају максимуме функција (2.14). Може се доказати помоћу извода да су то заиста максимуми. Приметимо да се повећањем базе логаритма Шенонова крива спушта, али је увек симетрична и има минимуме у тачкама 0 и 1 апсцисе. □

То значи да чешће бирање једне од опција смањује слободу. Таква ограничења долазе услед вањских, али и унутрашњих *присила*, попут страхова, несвесних или принудних[7] радњи, правила која себи намећемо, хедонизма. Присила је највећа када увек бирамо само једну од опција, а тада је слобода нула.

Слично, када имамо $m = 1, 2, 3, \dots$ могућности избора, највећу слободу имамо ако све бирамо равномерно, када су све вероватноће расподеле (2.13) међусобно једнаке. Тада је свако $p_k = \frac{1}{m}$, а Шенонова информација $\ell = \log m$. Приметимо да тада слобода расте са бројем m.

Према неким истраживачима (в. [8]) оволико информација добијамо помоћу наших чула: вид 83,0%, слух 11,0%, мирис 3,5%, додир 1,5%, укус 1,0%.

Пример 2.5.2. *Наћи Шенонову информацију за наших пет чула.*

Решење. Вероватноће употребе чула вида, слуха, мириса, додира и укуса, су редом:

$$p_1 = 0,830 \quad p_2 = 0,110 \quad p_3 = 0,035 \quad p_4 = 0,015 \quad p_5 = 0,010. \tag{2.15}$$

Њихов збир је један, па оне чине добро дефинисану рапсоделу вероватноћа. Шенонову информацију израчунавамо у природној бази:

$$\ell = -p_1 \ln p_1 - p_2 \ln p_2 - p_3 \ln p_3 - p_4 \ln p_4 - p_5 \ln p_5 = 0,623835. \tag{2.16}$$

Дакле, $\ell \approx 0,62$. Када би свих пет вероватноћа биле једнаке ($p = \frac{1}{5}$), Шенонова информација била би $\ln 5 \approx 1.61$ нат. □

Замислимо да поред ових пет чула имамо још неке могућности које делимо заједно са примањем информација путем датих чула мултитаскингом[8]. Следећа[9] теорема Шенонове информације одговара колика је тада информација.

Теорема 2.5.3. *Ако је r природан број мањи од датог n и ако су вероватноће $q_1 = p_1 + \dots + p_r$ и $q_2 = p_{r+1}, \dots, p_n$, тада:*

$$\ell(p_1, \dots, p_n) = \ell(q_1, q_2) + q_1 \ell(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_r}{q_1}) + q_2 \ell(\frac{p_{r+1}}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_2}). \tag{2.17}$$

Вероватноће $p_1, \dots, p_n$ чине расподелу (2.13).

Доказ. Из Шенонове информације имамо три једнакости:

$$\ell(q_1, q_2) = -q_1 \ln q_1 - q_2 \ln q_2,$$
$$q_1 \ell(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_r}{q_1}) = -p_1 \ln p_1 - \dots - p_r \ln p_r + q_1 \ln q_1,$$
$$q_2 \ell(\frac{p_{r+1}}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_2}) = -p_{r+1} \ln p_{r+1} - \dots - p_n \ln p_n + q_2 \ln q_2.$$

Сабирањем добијамо тражену једнакост. □

[7] Disorder: https://en.wikipedia.org/wiki/Obsessive\T2A\textendashcompulsive_disorder
[8] Human multitasking: https://en.wikipedia.org/wiki/Human_multitasking
[9] в. [6], стр. 10.

Да би применили ову теорему на претходни пример, додајући рецимо још само једно „чуло“, морамо испоштовати услов расподеле (2.13). То је, заправо, услов да наш мозак ради „мултитаскинг“, да у исто време може да обрађује само по један од добијених шест података.

Пример 2.5.4. *Наћи Шенонову информацију за наших пет чула плус још један, шести извор информација.*

Решење. У расподели имамо вероватноће $p_1, \dots, p_6$, од којих су првих пет у истој (продуженој) пропорцији као (2.15), а њихов збир $q_1 = p_1 + \dots + p_5$, док је $q_2 = p_6$. Тада из (2.17) следи:

$$\ell(p_1, \dots, p_6) = \ell(q_1, q_2) + q_1 \cdot 0,62 \tag{2.18}$$

јер је трећи сабирак нула због $\ell(1) = 0$. □

Када из првих пет чула немамо перцепције, тада је $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ па је и информација (2.18) нула. Када је $q_1 > 0,35$ односно када је допринос „шестог чула“ у укупној перцепцији мањи од 65%, тада је нова информација (2.18) већа од претходне (2.16). Највећа разлика између ове две постиже се за $q_1 = 0,73$ и износи $0,31$. Када шести извор изостане, тада је $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, а (2.18) се своди на претходну.

Пример 2.5.5. *Показати да је максимум функције* $y = -x \ln x$ *тачка* $T(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.



Slika 2.2: Информација (2.14).

Решење. Покажимо то помоћу извода. Из $y'(x_0) = -\ln x_0 - 1 = 0$ следи $x_0 = \frac{1}{e}$ а затим $y(x_0) = \frac{1}{e}$. На слици 2.2 плав је граф функције, а максимум црвена $T(\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$. □

Већ сам поменуо да процена (2.4) није Шенонова информација, јер не подлеже расподели (2.13), али сада можемо приметити да се она односи на мултипроцесирање[10], тј. паралелну обраду података (са више процесора).

[10]Multiprocessing: `https://en.wikipedia.org/wiki/Multiprocessing`

Glava 3

Статистике

Статистика се бави прикупљањем и анализирањем нумеричких података у великим количинама, посебно у сврху извођења њихових односа у целини на основу репрезентативног узорка.

3.1 Мултипроцеси

Мултипроцесирање је упоредно одвијање више процеса. Сматра се да наше тело обавља више хиљада радњи истовремено: варење, рад срца, подсвест, размишљање. Неки од тих процеса теку независно, а некада се преклапају. Слично је са радом државних органа. Службе раде у исто време, али документ може ићи на обраду и секвенцијално, од једне канцеларије до друге.

Са тим циљем проширујемо појам „слободе“ са Шенонове формуле (2.3) на:

$$\ell = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \tag{3.1}$$

Пре свега, ово је *скаларни производ* вектора:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n), \tag{3.2}$$

односно уређених низова дужине $n \in \mathbb{N}$. Размотримо то на примерима.

Замислимо да имамо два извора из којих излази 40 и 50 литара воде у јединици времена, са којих узимамо 10 и 20 одсто текућине. Означимо $a_1 = 0,1$ и $a_2 = 0,2$, затим $b_1 = 40$ и $b_2 = 50$. Укупно узимамо:

$$\ell = a_1b_1 + a_2b_2 = 14 \tag{3.3}$$

литара воде. Реч „вода“ може се заменити са „информација“.

Приметимо да су проценти узимања воде били *у складу* са капацитетом извора, са јачег извора смо узели већи проценат. Да је било обрнуто имали бисмо:

$$\ell' = a_2b_1 + a_1b_2 = 13 \tag{3.4}$$

литара, дакле мање воде. Уопште када су низови усклађени, када већем члану првог низа одговара већи другог, тада је резултат већи.

Лема 3.1.1. [1] *Ако је $a \geq b$ и $x \geq y$, тада је:*

$$ax + by \geq bx + ay, \tag{3.5}$$

при чему једнакост важи ако и само ако $a = b$ и $x = y$.

Доказ. Тврђење следи из:

$$(ax + by) - (bx + ay) = (ax - ay) - (bx - by) = (a - b)(x - y) \geq 0.$$

□

Подсетимо да различите редоследе неког низа називамо пермутацијама. На пример, низ $(1, 2, 3)$ има шест пермутација:

$$(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 3) \quad (2, 3, 1) \quad (3, 1, 2) \quad (3, 2, 1).$$

Низ са $n \in \mathbb{N}$ чланова има $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ пермутација[2]. Шта се догађа када су чланови низова (3.2) поредани по величини, а затим пермутујемо (само) прве факторе сабирака (3.1)?

Претпоставимо да су низови (3.2) поредани са лева у десно, од највећег ка најмањем. Према леми 3.1.1, свака замена места пара $a_i \geq a_j$ испред фактора $b_i \geq b_j$ смањује укупни збир (3.1). Тако је за $n = 3$:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \geq \underline{a_2}b_1 + \underline{a_1}b_2 + a_3b_3 \geq a_2b_1 + \underline{a_3}b_2 + \underline{a_1}b_3.$$

На тај начин доказујемо опште, следеће тврђење.

Теорема 3.1.2. *Ако је $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq \dots b_n$, тада је:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq a_{k_1}b_1 + a_{k_2}b_2 + \dots + a_{k_n}b_n, \tag{3.6}$$

где је $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ пермутација низа $(1, 2, \dots, n)$.

Доказ. Последњи индекс (ако $k_n \neq n$) на десној страни производа (3.6) потражимо (међу a-овима) лево, затим пермутујмо тај фактор са суседним десно, па опет са суседним десно док он не стигне на своју крајњу десну позицију. Поновимо исти поступак са следећим крајњим десним индексом (ако $k_{n-1} \neq n-1$). Са коначно много (мање од n) понављања оваквих поступака добијамо тражену неједнакост. □

Због комутативности сабирања сабирци не морају бити поредани да би важила неједнакост (3.6). Довољно је да су низови **a** и **b** „усклађени“, на начин да већем члану једног одговара већи другог.

У специјалном случају, када је **a** расподела вероватноћа, а $b_k = -\ln a_k$ редом за $k = 1, 2, \dots, n$, тада је (3.1) Шенонова информација. Из последње теореме следи да је то најоптималнија пермутација фактора сабирака, да Шенонова информација даје највећи могући збир производа чланова низа **a** са члановима низа **b**.

[1] „лема“ значи „мала теорема“ или „пред теорема“

[2] $n!$ чит. „ен факторијел“

3.2 Усклађивање

Претпоставимо да је на неком путу постављен знак ограничења брзине на 60 километара на час и да је према некој скали процењен ризик да ће вожња бити безбедна у случају придржавања ограничења. Када је једном бодован овај ризик се увек може изразити процентом, рецимо са 85 одсто шансе да се у случају придржавања забране неће десити несрећа, односно коефицијентом $b = 0,85$.

Рецимо да је бројањем возила на том путу установљено да 76 одсто возила поштује дато ограничење или изражено коефицијентом $a = 0,76$. Тада дефинишемо да је коефицијент безбедности на том месту $ab = 0,646$ или процентуално $64,6\%$.

Уопште, рецимо да на $n = 1,2,3,\dots$ места имамо знакове ограничења брзине, са проценама $b_1, b_2, \dots, b_n$ да би вожња могла бити безбедна у случају поштовања знака, а да је поштовање тих знакова редом $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тада је коефицијент збирне безбедности на датим путевима (3.1). Што је веће ℓ већа је безбедност.

Према теореми 3.1.2 највећа безбедност долази усклађивањем поштовања брзине вожње са проценама безбедности. Прво од стране возила (возача), друго од стране саобраћајних инжењера. Са већим израчунатим ℓ иде и већа „слобода“ учесника у саобраћају. Усклађивањем интелигенције **i** појединаца са хијерархијом **h** друштва повећаће се слобода $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$.

Приметимо да су ове слободе *адитивне* и на следећи начин. Нека су дата два пара низова: први пар $\mathbf{a}' = (a_1, a_2)$ и $\mathbf{b}' = (b_1, b_2)$, а други пар $\mathbf{a}'' = (a_3, a_4)$ и $\mathbf{b}'' = (b_3, b_4)$. Тада је $\ell = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$, тј.

$$\ell = (a_1b_1 + a_2b_2) + (a_3b_3 + a_4b_4) = (a_1, a_2) \cdot (b_1b_2) + (a_3, a_4) \cdot (b_3, b_4) = \ell' + \ell'', \qquad (3.7)$$

односно $\ell = \ell' + \ell''$.

Применимо ово на још општији случај, произвољне врсте у *еволуцији.* Издвојимо само једну особину X из окружења те врсте. Нека је x вероватноћа да ће јединка преживети ако има особину X, а $y = 1 - x$ вероватноћа да неће. Поред тога, нека је a' вероватноћа да прва генерација јединки има особину X, а $b' = 1 - a'$ да нема, а затим да је a'' вероватноћа да следећа генерација јединки има особину X, а $b'' = 1 - a''$ да нема.

У првој генерацији је слобода $\ell' = a'x + b'y$, у другој $\ell'' = a''x + b''y$. Одузимањем добијамо $\ell'' - \ell' = (a''x + b''y) - (a'x + b'y) = (a'' - a')x + (b'' - b')y$, затим

$$\ell'' - \ell' = (a'' - a')x - (a'' - a')y = (a'' - a')(x - y) \ge 0, \qquad (3.8)$$

тј. $\Delta\ell = \ell'' - \ell' > 0$ само ако су јединке усклађене са околином.

Наиме, ако са $x > y$ и према томе $x > \frac{1}{2}$, имамо $a'' > a'$, то значи *адаптацију* врсте на особину X, али и повећање слободе ℓ. Исто повећање слободе имамо ако са $x < \frac{1}{2}$, што значи $x < y$, имамо $a'' < a'$, а то је еволуција у безбедније особине. Обрнуто, ако врста не еволуира ка већим шансама за преживљавање, тада је $x > y$ али $a'' < a'$, па је слобода мања, $\Delta\ell < 0$.

Према томе, еволуција адаптације и повећање слободе су еквиваленти. Еволуција је усклађивање особина јединке (низ **a**) и околине (низ **b**) тако да њихов производ ($\ell = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$) расте.

3.3 Корелација

Корелација (лат. con: са, relatio: однос) је узајамни однос или веза између две или више ствари. У статистици, *корелација* је зависност између две случајне варијабле или два скупа података процењена помоћу реалног броја r већег од -1 а мањег од $+1$, којег називамо *коефицијент корелације.*

Корелација $r > 0,7$ значи јаке позитивне везе (више једне - више друге) варијабли, док r од $-0,3$ па до нуле значи слабе негативне везе (више једне - мање друге).

Прво требамо два низа података, две случајне варијабле:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \tag{3.9}$$

за које израчунавамо средње вредности:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k, \tag{3.10}$$

затим варијансе:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2, \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k - \bar{y})^2, \tag{3.11}$$

па коваријансу:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_k - \bar{x}\bar{y}). \tag{3.12}$$

Они дефинишу *Пеарсонов коефицијент* линеарне корелације:

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x^2}\sqrt{S_y^2}} = \frac{\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_k (y_k - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_k (x_k y_k - \bar{x}\bar{y})}{\sqrt{\sum_k (x_k - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_k (y_k - \bar{y})^2}}. \tag{3.13}$$

Приметимо да r можемо рачунати и непосредно, као разломак десно.

Корелација r постаје *косинус* угла између вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, ако интензитете вектора дефинишемо као корене у (3.13), а скаларни производ као бројник. Одговарајући израз за слободу био би $L = \ell - n\bar{x}\bar{y}$, где је ℓ слобода дефинисана „обичним" скаларним производом (3.1).

На пример, продавница сладоледа је током $n = 12$ дана пратила дневну температуру ($\mathbf{x}$) и број комада продатог сладоледа ($\mathbf{y}$) и формирала таблицу:

x:	14,2	16,4	11,9	15,2	18,5	22,1	19,4	25,1	23,4	18,1	22,6	17,2
y:	215	325	185	332	406	522	412	614	544	421	445	408

Израчунавамо редом, од $\bar{x} = 18,675$ и $\bar{y} = 402,4167$ па до $r = 0,9575$. Закључак је да постоје јаке позитивне везе између температуре ваздуха и продаје сладоледа. Ако је косинус угла између ових вектора $\cos\varphi = r$, тада је угао $\varphi = 16,7°$.

3.4 Регресија

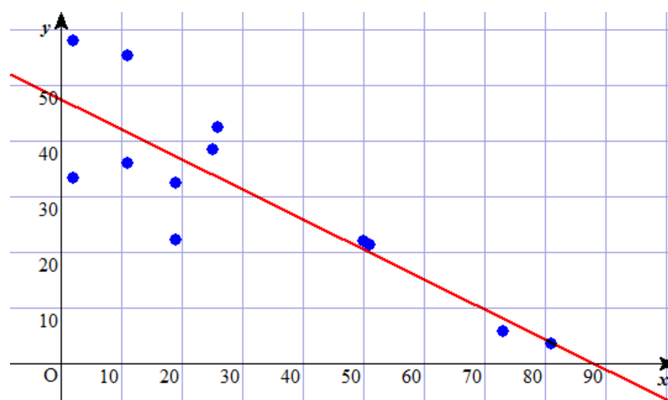
Док корелација испитује јачину зависности случајних варијабли, *регресија* испитује њихов облик и то помоћу регресионе линије. У равни Oxy су дате тачке $T(x_k, y_k)$ са координатама (3.9), за које тражимо једначину праве линије облика:

$$y = a + bx, \tag{3.14}$$

која им је статистички најближа. Користимо методу најмањих квадрата и добијамо:

$$a = \bar{y} - b\bar{x}, \quad b = \frac{\sum_k (x_k y_k - \bar{x}\bar{y})}{\sum_k (x_k^2 - \bar{x}^2)}, \tag{3.15}$$

са ознакама из (3.10).



Slika 3.1: Регресија (3.17).

На пример[3], прва варијабла **x** је проценат ученика који примају додатак у 12 америчких школа и она представља њихов социјално-економски статус. Друга варијабла **y** је проценат ученика које носе кацигу док возе бицикл.

x:	50	11	2	19	26	73	81	51	11	2	19	25
y:	22,1	35,9	57,9	22,2	42,4	5,8	3,6	21,4	55,2	33,3	32,4	38,4

Отуда, $n = 12$, $\bar{x} = 370/12 = 30,833$ и $\bar{y} = 370,6/12 = 30,883$. Даље израчунавамо:

$$\ell = \sum_{k=1}^{12} x_k y_k = 7195,7; \quad r = \frac{-4231,13}{\sqrt{7855,67}\sqrt{3159,68}} = -0,849266 \tag{3.16}$$

а то је r јаке негативне корелације. Параметри регресије су:

$$b = \frac{-4231,13}{7855,67} = -0,538609 \quad a = 47,4904$$

па је регресиона линија:

$$y = -0,54x + 47,49. \tag{3.17}$$

То је црвена линија кроз дате плаве тачке, на слици 3.1, која показује да сиромашнија деца ређе носе заштитну кацигу док возе бицикл.

[3] SJSU: `http://www.sjsu.edu/`

3.5 Примери

Делови, не само нашег тела, имају сопствену „памет“ и често обављају различите операције у исто време. Тако ми, на пример, можемо у исто време да ходамо, причамо и жваћемо.

Пример 3.5.1. *Дефинисати систем са $m \in \mathbb{N}$ процесора над истих $n \in \mathbb{N}$ процеса.*

Решење. Мултипроцесирање са m процесора над n задатака $P_1, P_2, \dots, P_n$, води нас до m расподела вероватноћа:

$$\begin{cases} 1: & p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n} = 1 \\ 2: & p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n} = 1 \\ \dots & \dots \\ m: & p_{m1} + p_{m2} + \dots + p_{mn} = 1, \end{cases} \tag{3.18}$$

сваки са сопственом информацијом:

$$\ell_k = -p_{k1} \ln p_{k1} - p_{k2} \ln p_{k2} - \dots - p_{kn} \ln p_{kn}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{3.19}$$

Укупна информација таквог система била би:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_m, \tag{3.20}$$

а то је уједно и израз за слободу, количину могућности, система који је у стању да контролише опције $P_1, P_2, \dots, P_n$. □

Огроман је број таквих процеса у нашем телу, углавном нама непознатих. Оно што називамо „слободна воља“ је њихова последица и наша илузија[4]. Отуда долазе и нелагоде променом вањске хијерархије и *побуне народа* због (промена) слободе.

Пример 3.5.2. *Помоћу скаларног производа (3.1), односно $\ell = \mathbf{i} \cdot \mathbf{h}$, анализирати мушко-женске односе у друштву.*

Решење. Друштвена (вањска) хијерархија последњих се хиљада година развијала више под доминацијом мушкараца. Ако је она (политика, рат, богаћење) више наклоњена способностима мушкараца, вектор $\mathbf{i}_m$ способности мушкараца, за разлику од женског $\mathbf{i}_w$, заклапаће мањи угао према вектору хијерархије $\mathbf{h}$.

Према томе, у случају истог интензитета интелигенције мушкараца и жена данас, $i_m = i_w$, биће производ $\ell_w = \mathbf{i}_w \cdot \mathbf{h}$ жена мањи, што ће значити њихову мању слободу, $\ell_m < \ell_w$, односно мању количину могућности жена у друштву. У случају изједначења слобода, $\ell_m = \ell_w$, биће жеља за (јачом) хијерархијом код жена већа.

Међутим, жене могу имати и једнаку или мању потребу за хијерархијом, ако су живећи дуго у отежаним условима (еволуцијом) могле развити веће способности и порастом i_w постићи већи производ, $\ell_m = \ell_w$. □

[4]Претежно, јер узроком, невољним процесима, не можему управљати.

Наведени пример је поучан, наравно не само због мушко-женских односа, већ уопште и за разумевање различитих култура. Странац нам може изгледати глуп само зато што је неприлагођен. Он се зато може лакше носити са правилима која су нама можда престрога.

Видели смо да се слобода $\ell = \mathbf{i}\cdot\mathbf{h}$ може апроксимирати коваријансом, па и бројником коефицијента линеарне корелације у изразу (3.13):

$$L = \ell - n\bar{x}\bar{y}, \quad \ell = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k. \tag{3.21}$$

Да ли је то слагање могуће изразити неком „лакшом“ математиком?

Пример 3.5.3. *Показати да је L израза (3.21) позитивно када су интелигенција* $\mathbf{x}$ *и хијерархија* $\mathbf{y}$ *усклађене, у случају:*

а) када је $n = 2$; б) када је $n = 3$.

Решење. а) Имамо редом $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\bar{y} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ и $\ell = x_1y_1 + x_2y_2$, па је:

$$L = \ell - 2\bar{x}\bar{y} = (x_1y_1 + x_2y_2) - \frac{1}{2}(x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2),$$

што значи ако је $x_1 - x_2$ и $y_1 - y_2$ истог знака, тада је $L > 0$.

б) Из $\bar{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $\bar{y} = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ и $\ell = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ следи:

$$L = \ell - 3\bar{x}\bar{y} = \frac{1}{3}[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(y_1 - y_3) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3)],$$

што опет значи ако су низови $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ усклађени, тада је L позитиван број. □

Правила игре које нам намеће природа понекад је релативно лако вредновати. На пример, ако толико и толико дана не уносим довољно витамина C имаћу толико и толико шансе да оболим од скорбута. Међутим, такво вредновање зна бити потешко са друштвеним нормама.

Пример 3.5.4. *Како би се друштвене норме могле мерити демократски, ослањајући се на понашања многих појединаца?*

Решење. Рецимо регресијом (3.14). Уз претпоставку да су друштвени закони усклађени са масом појединаца на које се односе, могуће је формирати регресиону праву линију која их апроксимира.

На пример, на 12 места стоје саобраћајни знакови ограничења, а ми бројимо возила и одређујемо фреквенцију поштовања тих регулатива. Након одређеног времена добијамо низове из којих можемо извући регресиону праву и дефинисати „квалитет“ закона, ставку по ставку. □

Напомињем још једном да је могуће имати скупштинску већину и изгласати неки закон којим ће у примени бити незадовољна већина појединаца.

Bibliografija

[1] Растко Вуковић: *АНАЛИЗА ДЕМОКРАТИЈЕ*, утопија, ауторитет и суживот, Бања Лука[5], октобар 2015.

[2] Растко Вуковић: *Критика правног система*, тешкоће правне државе и владавине закона, Бања Лука[6], јан - март 2016.

[3] Растко Вуковић: *Критика правног система II*, кафанска и фејсбук филозофија, Бања Лука[7], 1. април 2016.

[4] Растко Вуковић: *Критика правног система III*, слобода, интелигенција и хијерархија, Бања Лука[8], 1-21. април 2016.

[5] Растко Вуковић: *Критика правног система IV*, израчунавање индивидуа и хијерархија, Бања Лука[9], 29. април 2016.

[6] Растко Вуковић: *МАТЕМАТИЧКА ТЕОРИЈА ИНФОРМАЦИЈЕ И КОМУНИКАЦИЈЕ*, Друштво математичара Републике Српске, Бања Лука 1995.

[7] Erich Fromm: *Bekstvo od slobode*, NAPRIJED[10] i NOLIT, Zagreb 1984.

[8] Dr. L.D. Rosenblum, Dr. Harold Stolovitch and Dr Erica Keeps: *See What I'm Saying*: The Extraordinary Powers of Our Five Senses, March 22, 2010.

[9] Растко Вуковић: *АНАЛИЗА СЛОБОДЕ*, интелигенција и хијерархија, нулто издање, Бања Лука[11], 6. мај 2016.

[5] Анализа демократије: `www.academia.edu/16788149/`
[6] Критика правног система I: `www.academia.edu/23907892/`
[7] Критика правног система II: `www.academia.edu/24298160/`
[8] Критика правног система III: `www.academia.edu/24622506/`
[9] Критика правног система IV: `www.academia.edu/24869512/`
[10] Bekstvo od slobode: `https://www.scribd.com/doc/31411430/Erich-Fromm-Bekstvo-Od-Slobode`
[11] Анализа демократије: `https://www.scribd.com/doc/311739082/Analiza-slobode`

Indeks

Данинг-Кругеров ефекат, 10
Ерих Фром, 12
Хипарх, 17
Пеарсонов коефицијент, 24
Погсонов закон, 17
Стокхолмски синдром, 12
Веберов закон, 16
адаптација, 23
адитивност, 16, 23
астрономија, 17
бактерија, 6
безбедност, 23
бубе, 7
демократија, 11
друштвене норме, 27
еволуција, 23
филозофија, 6
хијерархија, 5, 8
    адитивност, 9
    интензитет, 8
информација, 13, 26
    Хартлијева, 14
    максимална, 18
    процена, 15
    Шенонова, 14
интелигенција, 5, 7
    модуо, 7
јединка, 6
корелација, 24
косинус, 9, 24
лидер, 12
лимен, 16
луминозност, 17
магнитуда, 17
метода најмањих квадрата, 25
могућности, 5, 7
мултипроцесирање, 20, 21, 26
мушко-женски односи, 26
одлучивање, 5, 6
одлука, 5
окружење, 6
опција, 5
овца, 6
побуна народа, 26
породица, 9
правни систем, 9, 11
присила, 19, 26
проблем секретарице, 15
продавница сладоледа, 24
расподела вероватноћа, 18
регресија, 25
религија, 9
сјај звезда, 17
скорбут, 27
слобода, 5, 6
    апроксимација, 27
слободна воља, 26
стадо, 6
статистика, 21
ћелија
    биљке, 6
усклађен, 21, 22, 27
вектор, 7, 8
    интензитет, 9
    скаларни производ, 21
    угао, 9, 24